अध्यायः 11

क्षेत्रमितिः

11.1 भूमिका

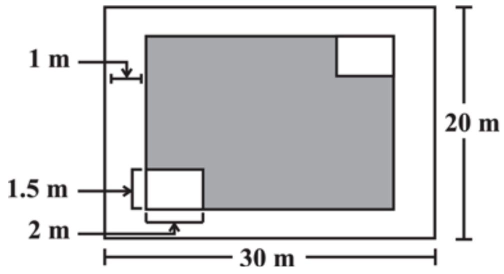
वयम् अध्ययनं कृतवन्तः यत् कस्यापि पिहितसमतल-आकृतेः सीमानं परितः या दूरी वर्तते तत् परिमापनम् उच्यते इति । तथा तया आकृत्या आवृत्तक्षेत्रं तस्य क्षेत्रफलम् इति उच्यते । वयं त्रिभुजानां आयतानां वृत्तादि-विभिन्नसमतल-आकृतीनां परिमापनं तथा क्षेत्रफलं कथं ज्ञायते इति ज्ञातवन्तः तथा आयताकाराणां प्रान्तभागानाम् अथवा पगमार्गाणां क्षेत्रफलम् अपि ज्ञातुं शिक्षितवन्तः ।

अस्मिन् अध्याये वयं चतुर्भुजः इव द्वितीय-पिहित-आकृतीनां क्षेत्रफलेन एवं परिमापेन सह सम्बन्धित-समस्यां समाधातुं प्रयत्नं कुर्मः । वयं घनानां घनाभानां तथा बेलनाकारसदृशां सघनानां पृष्ठीयक्षेत्रफलस्य एवम् आयतनस्य अपि अध्ययनं कुर्मः ।

11.2 आगच्छन्तु स्मरणं कुर्मः

स्वकीय पूर्वज्ञानस्य सर्वेक्षणाय वयम् एकस्य उदाहरणस्य चर्चां कुर्मः । एषा एकस्य आयताकार-उद्यानस्य आकृतिः अस्ति यस्य औन्नत्यं 30 मीटरपर्यन्तं तथा वैशाल्यं 20 मीटरपरिमितम् अस्ति ।
(आकृतिः 11.1)

(i) एतत् उद्यानं चतुर्दिक्षु आवृत्तं कर्तुं या भित्तिः वर्तते तस्य दीर्घता का अस्ति ? भित्तेः औन्नत्यं ज्ञातुम् अस्माकं कृते तस्य उद्यानस्य परिमापं ज्ञातव्यं भवति । यत् 100 मीटरपरिमितम् अस्ति । (परीक्षणं कुर्वन्तु) ।



आकृतिः 11.1

(ii) कियत् परिमिता भूमिः उद्यानेन व्याप्तम् अस्ति ? अनेन उद्यानेन व्याप्तां भूमिं ज्ञातुम् अस्य क्षेत्रफलं ज्ञातव्यं भवति । यत् 600 वर्गमीटर परिमितम् (m^2) अस्ति (कथम् ?)

(iii) उद्यानस्य परिमापेन सह अन्तः एकमीटरपरिमितः विशालतायुक्तः मार्गः अस्ति यस्मिन् पाषाणचूर्णं योजनीयम् अस्ति यदि 4 वर्गमीटरपरिमिते (m^2) क्षेत्रफले पाषाणचूर्णं योक्तुं एकगोणी परिमितं पाषाणचूर्णं लगिष्यति तर्हि अस्मिन् सम्पूर्णे मार्गे पाषाणचूर्णं योक्तुं कति पाषाणचूर्णस्य गोणिकायाः आवश्यकता वर्तते ।

वयं कथयितुं शक्नुमः यत् उपयोज्यमान

$$\text{पाषाणचूर्णस्य गोणीनां संख्या} = \frac{\text{मार्गस्य क्षेत्रफलम्}}{\text{गोण्या पाषाण-चूर्णेन कृतं क्षेत्रफलम्}}$$

पाषाणचूर्णेन निर्मीयमाणस्य मार्गस्य क्षेत्रफलम् =

उद्यानस्य क्षेत्रफलम् - उद्यानस्य तत् क्षेत्रफलं यस्मिन् पाषाणचूर्णं नापेक्षते । मार्गस्य वैशाल्यं 1 मीटरपरिमितम्

अस्ति अत एव यस्मिन् भागे पाषाणचूर्णं न लगिष्यति तस्य आयताकारं क्षेत्रफलम् (30-2)×(20-2)m^2 अस्ति।

एतत् 28 ×18 m^2 अस्ति। अतः उपयोगे योज्यमानानां पाषाणचूर्णस्य गोणीनां संख्या = ...

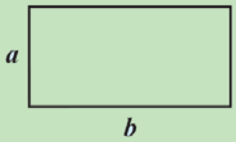
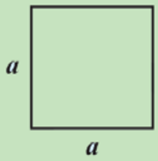
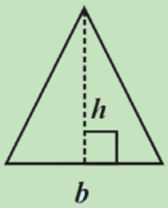
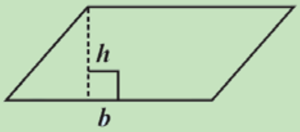
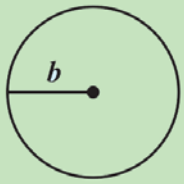
(iv) यथा आरेखे (आकृतिः 11.1) प्रदर्शितम् अस्ति। अस्मिन् उद्याने पुष्पाणां द्वौ आयताकारौ केदारौ स्तः। ययोः प्रत्येकम् आकारः 1.5 m×2 m अस्ति तथा अवशिष्ट-उद्यानस्य उपरि घासः अस्ति। घासेन आवृत्तं क्षेत्रफलं जानन्तु।

आयताकार केदाराणां क्षेत्रफलम् = ...

मार्गे पाषाणचूर्णस्य योजनानन्तरम् उद्यानस्य अवशिष्टं क्षेत्रफलम् = ...

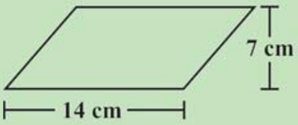
घासेन आवृत्तं क्षेत्रफलम् = ...

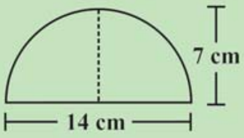
यदि केचन मापाः दत्ताः चेत्, वयं आयतापेक्षया अन्य-आकाराणां क्षेत्रफलानि अपि अवगन्तुं शक्नुमः। तत् स्मृत्वा एतान् योजयन्तु -

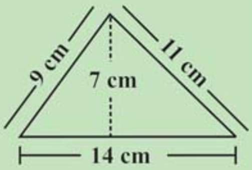
आरेखः	आकारः	क्षेत्रफलम्
	आयतः	a×a
	वर्गः	b×h
	त्रिभुजः	πb^2
	समान्तरचतुर्भुजः	$\frac{1}{2}$ b×h
	वृत्तः	a×b
किं भवन्तः उपर्युक्त-आकारेषु प्रत्येकं परिमापस्य सूत्रं लेखितुं शक्नुवन्ति ?		

प्रयासं करोतु

(a) निम्नलिखित-आकृतीनां तेषां क्षेत्रफलेन साकं मेलनं कुर्वन्तु -





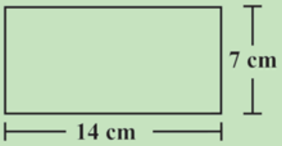


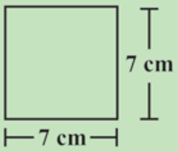
49 सेमी^{2}

77 सेमी^{2}

98 सेमी^{2}

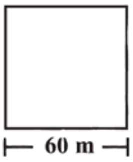
(b) प्रत्येकम् आकारस्य परिमापं लिखन्तु।



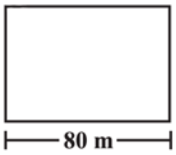


प्रश्नावली 11.1

1. यथा संलग्न-आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति एकस्य आयताकारस्य तथा एकस्य वर्गाकारक्षेत्रस्य मापनं प्रदत्तम् अस्ति यदि एतस्य परिमापनं समानम् अस्ति तर्हि कस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अधिकं भविष्यति ?

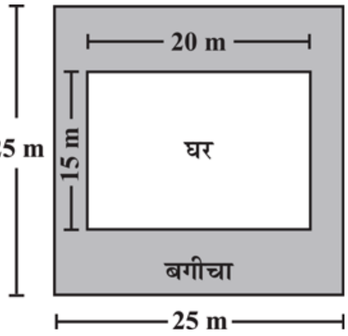


(a)

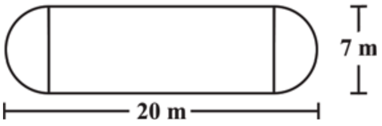


(b)

2. श्रीमतिकौशिकस्य पार्श्वे चित्रे प्रदर्शितं मापयुक्तः एकः वर्गाकारक्षेत्रभागः अस्ति। सा भूमिखण्डमध्ये एकं गृहं निर्मातुम् इच्छति। गृहं परितः एकम् उद्यानं विकसितम् अस्ति। 55 रुप्यकात्मकं प्रतिवर्गमीटरं प्रतिमानेन अस्य उद्यानस्य विकासार्थं व्ययं जानन्तु।



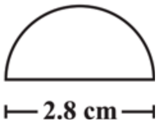
3. यथा आरेखे प्रदर्शितम् अस्ति, एकस्य उद्यानस्य आकारः मध्ये आयताकारः अस्ति तथा प्रान्तभागे अर्धवृत्तरूपे अस्ति। अस्य उद्यानस्य परिमापं तथा क्षेत्रफलं जानन्तु [आयतस्य औन्नत्यं 20 - (3.5 + 3.5) मीटरपरिमितम् अस्ति।]



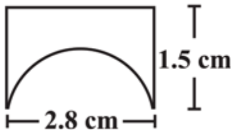
4. भूतलं निर्मातुं उपयुज्यमानस्य एकस्य सङ्गमरप्रस्तरस्य आकारः समान्तर चतुर्भुजस्य अस्ति यस्य आधारः 24 सेमी तथासङ्गतस्य औन्नत्यं 10सेमी अस्ति। 1080 वर्गमीटरपरिमितस्य एकस्य क्षेत्रफलस्य एकं भूतलम् आच्छादितुम् ईदृशानां कति सङ्गमरप्रस्तराणाम् आवश्यकता अस्ति ? (भूतलस्य कोणान् पूरयितुं भवन्तः स्व-आवश्यकतानुसारं सङ्गमरप्रस्तरान् केनापि प्रकारेण त्रोटयितुं शक्नुवन्ति।)

5. एका पिपीलिका भूतले विकरितानां विभिन्नप्रकारकाणाम् अन्नकणानां चतुर्दिक्षु भ्रमति। भोज्यपदार्थस्य कस्मै कणाय पिपीलिकायाः कृते दीर्घ-चक्रं करणीयं भविष्यति ? स्मरणे रक्षन्तु यत् वृत्तस्य परिधिं भवन्तः $c=2\pi r$ इति सूत्रस्य साहाय्येन प्राप्तुं शक्नुवन्ति। यत्र r वृत्तस्य त्रिज्या अस्ति।

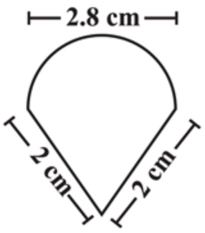
(a)

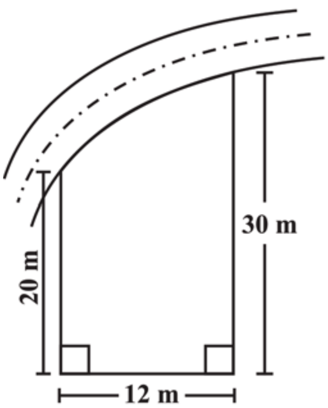


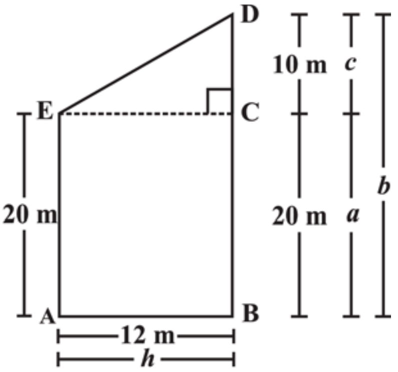
(b)



(c)







11.3 समलम्बस्य क्षेत्रफलम्

नजमायाः पार्श्वे मुख्यमार्गस्य पार्श्वे एकः भूभागः अस्ति (आकृतिः 11.2)। तस्याः भूभागः प्रातिवेशिकस्य भूभागस्य आकारः इव नास्ति । अस्मिन् भूभागे सम्मुखभुजानां केवलम् एकः युग्मः समान्तरः अस्ति। अत एव एषः प्रायशः समलम्बस्य आकारसदृशः एव अस्ति। किं भवन्तः अस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ? आगच्छन्तु यथा 11.3 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति वयम् अस्य भूभागस्य शीर्षेभ्यः नामानि दद्मः। EC||AB इति निर्माय वयम् एतं भूखण्डं भागद्वये विभक्तुं शक्नुमः ययोः एकः आयताकारः आकारः अस्ति तथा द्वितीय त्रिभुजस्य आकारः वर्तते। (एतत् C इत्यस्मिन् समकोणः अस्ति) (यथा 11.3 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति।)

$\triangle$ECD इत्यस्य क्षेत्रफलं $= \frac{1}{2}\ h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$मी^{2}

आयतः ABCE इत्यस्य क्षेत्रफलं $= h \times a = 12 \times 20 = 240$मी^{2}

समलम्बचतुर्भुजस्य ABDE इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\triangle$ECD इत्यस्य क्षेत्रफलम् + आयतः ABCE इत्यस्य क्षेत्रफलम् $= 60+240=300$मी^{2}

वयं एते क्षेत्रफले संयुक्तरूपेण लिखामः। एवं रीत्या

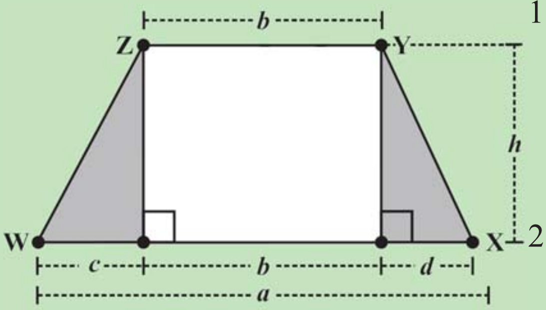
समलम्बः ABDE इत्यस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}h \times c + h \times a = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$

$$= h\ \frac{c + 2a}{2} = h\ \frac{c + a + a}{2}$$

$$= h\ \frac{(b+a)}{2} = \text{औन्नत्यं}\ \frac{(\text{समान्तर-भुजानां योगः})}{2}$$

अस्मिन् व्यञ्जके h, b तथा a इत्यस्य मानं रक्षणे सति वयं $h\ \frac{(b+a)}{2} = 300$मी^{2} प्राप्नुमः।

प्रयासं करोतु

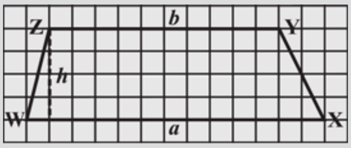


आकृतिः 11.4

1. नजमायाः भगिन्याः पार्श्वे अपि समलम्बाकारयुक्तः एकः भूभागः अस्ति यथा 11.4 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति एतत् त्रिषु भागेषु विभजन्तु । प्रदर्शयन्तु यत् समलम्बस्य WXYZ इत्यस्य क्षेत्रफलं $= h\ \frac{(b+a)}{2}$
2. यदि h=10सेमी, c=6सेमी, b=12सेमी, d=4सेमी तर्हि अस्य प्रत्येकभागस्य मानं पृथक्-पृथक् जानन्तु तथा WXYZ इत्यस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुम् एतेषां योगं कुर्वन्तु । h ,a तथा b इत्यस्य मानव्यञ्जकः $\frac{h(a+b)}{2}$ इत्यस्मिन् संस्थापयन् अस्य सत्यापनं कुर्वन्तु।

एतत् कुर्वन्तु

1. आलेख-कागदस्य (रेखाङ्कितं कागदस्य) अन्तः कञ्चित् समलम्बं WXYZ इति रचयन्तु यथा 11.5 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति तथा एतत् कर्तयित्वा बहिः निष्कासयन्तु।

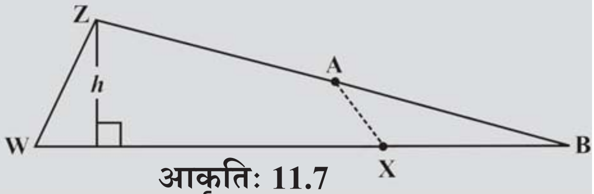


आकृतिः 11.5

2. XY इति भुजं पुटीकृत्य अस्य मध्यबिन्दुं जानन्तु तथा एतस्य नाम A इति कुर्वन्तु (आकृतिः 11.6)।

आकृतिः 11.6

3. ZA इत्यनेन भुजेन अनुदिशं कर्तयन्तः WXYZ इति भागद्वये कर्तयन्तु। △ZYA इति एवं स्थापयन्तु यथा 11.7 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति यस्मिन् AY इति AX इत्यस्य उपरि संस्थापितम् अस्ति।
   बृहत् त्रिभुजाकारस्य दीर्घता का अस्ति ? अस्य त्रिभुजक्षेत्रफलस्य व्यञ्जकं लिखन्तु (आकृतिः 11.7)।



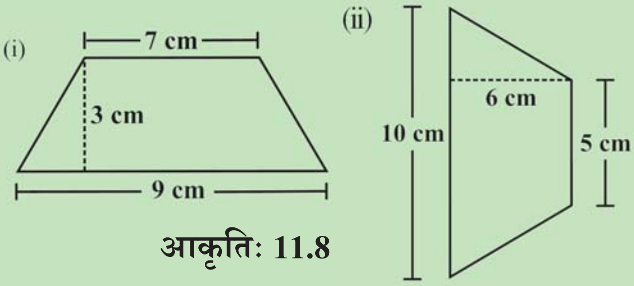
आकृतिः 11.7

4. अस्य त्रिभुजस्य तथा WXYZ इति समलम्बस्य क्षेत्रफलं समानम् अस्ति। (कथम् ?) त्रिभुजक्षेत्रफलव्यञ्जकस्य उपयोगं कुर्वन्तः समलम्बक्षेत्रफलस्य व्यञ्जकं प्राप्नुवन्तु।

एवं रीत्या समलम्बस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुम् अस्माकं कृते समान्तरभुजानाम् दीर्घता तथा एतयोः द्वयोः समान्तर-भुजयोः मध्ये लम्ब-दूरीं ज्ञातव्या अस्ति। समान्तरभुजानाम् दीर्घतायाः योगः तथा एतयोर्मध्ये लम्बायमानादूर्याः गुणनफलस्य अर्धतः वयं समलम्बस्य क्षेत्रफलं प्राप्नुमः।

प्रयासं करोतु

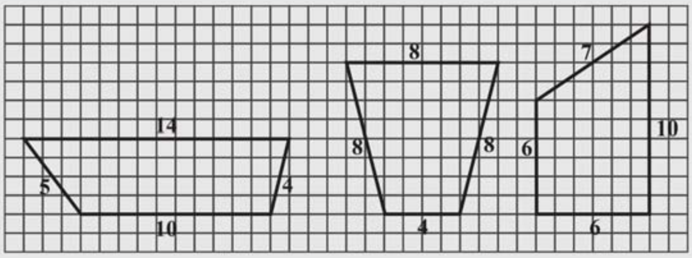
निम्नलिखित-समलम्बस्य क्षेत्रफलं जानन्तु (आकृतिः 11.8)



आकृतिः 11.8

एतत् कुर्वन्तु

सप्तम-कक्ष्यायां वयं विभिन्नपरिमापयुक्तानां समान-क्षेत्रफलान्वित-समान्तर-चतुर्भुजानां रचनां शिक्षितवन्तः। किम् एतत् समलम्बानां कृते अपि कर्तुं शक्यते ? परीक्षयन्तु किं विभिन्न-परिमापयुक्तानां निम्नलिखितसमलम्बानां क्षेत्रफलानि समानानि सन्ति। (आकृतिः 11.9)



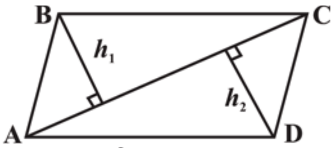
आकृतिः 11.9

वयं जानीमः यत् सर्वाः सर्वाङ्गसमाः आकृतयः क्षेत्रफले समानाः भवन्ति। किं वयं कथयितुं शक्नुमः यत् समानक्षेत्रफलयुक्ताः आकृतयः सर्वाङ्गसमाः अपि भवन्ति ? किम् एताः आकृतयः सर्वाङ्गसमाः सन्ति ?

एकस्मिन् वर्गाकार कागदे न्यूनातिन्यूनम् एतादृशं समलम्बं रचयन्तु यस्य परिमापनं समानं स्यात् परन्तु क्षेत्रफलं विभिन्नं भवेत्।

11.4 सामान्य चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्

कस्यापि सामान्यचतुर्भुजस्य एकं विकर्णं रचयित्वा तं त्रिभुजद्वये विभाजयितुं शक्नुवन्ति। एषा विभक्तकरणस्य क्रिया सामान्यचतुर्भुजस्य कृते सूत्रं ज्ञातुं सहायतां करोति। प्रदत्त-आकृतेः अध्ययनं कुर्वन्तु। (आकृतिः 11.10) ABCDइति चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम्



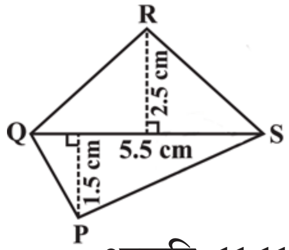
आकृतिः 11.10

= ($\triangle$ABC इत्यस्य क्षेत्रफलम्)+($\triangle$ADC इत्यस्य क्षेत्रफलम्)

$= (\frac{1}{2}\ AC\times h_1)+(\frac{1}{2}\ AC\times h_2) = \frac{1}{2}\ AC\times(h_1+h_2)$

$= \frac{1}{2}\ d\ (h_1+h_2)$ अत्र AC इत्यस्य औन्नत्यं d अस्ति।

उदाहरणम् 1 11.11 आकृतौ प्रदर्शयितुं चतुर्भुजस्य PQRS इत्यस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।



आकृतिः 11.11

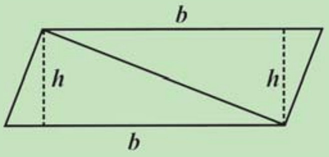
समाधानम् अत्र d=5.5सेमी, h_1= 2.5सेमी, h_2=1.5सेमी,

क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}\ d\ (h_1+h_2) = \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5+1.5)$ सेमी^{2}

$= \frac{1}{2}\times 5.5\times 4$सेमी^{2}=11सेमी^{2}

प्रयासं करोतु

वयं जानीमः यत् समान्तरचतुर्भुजः अपि एकः चतुर्भुजः अस्ति। आगच्छन्तु एतम् अपि वयं त्रिभुजद्वये विभक्तं कुर्मः तथा द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलं जानीमः। एवं रीत्या समान्तर-चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् अपि जानीमः। किम् एतत् सूत्रं भवद्भिः पूर्वज्ञातसूत्रेण साकं मिलति ? (आकृतिः 11.12)



आकृतिः 11.12

11.4.1 विशेष-चतुर्भुजानां क्षेत्रफलम्

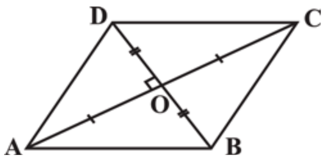
त्रिभुजेषु विभाजयितुं यः विधिः अस्ति, तं वयं समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलस्य सूत्रं ज्ञातुम् उपयोगं कर्तुं शक्नुमः। 11.13 आकृतौ ABCD इति नाम एकः समचतुर्भुजः अस्ति। अत एव अस्य विकर्णौ परस्परं समद्विभाजकौ स्तः।

समचतुर्भुजस्य ABCD इत्यस्य क्षेत्रफलं

= ($\triangle$ACD इत्यस्य क्षेत्रफलम्)+($\triangle$ABC इत्यस्य क्षेत्रफलम्)

$= (\frac{1}{2} \times AC \times OD) + (\frac{1}{2} \times AC \times OB) = \frac{1}{2} AC \times (OD+OB)$

$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$ यत्र $AC = d_1$ $BD = d_2$



आकृतिः 11.13

अन्य-शब्देषु कथयामः चेत् समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं तस्य विकर्णयोः गुणनफलस्य अर्धम् अस्ति।

उदाहरणम् 2 एकम् एतादृशस्य समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं जानन्तु यस्य विकर्णयोः दीर्घता 10सेमी तथा 8.2सेमी स्तः।

समाधानम् : समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2} d_1 d_2$, यत्र d_1, d_2 विकर्णयोः दीर्घता अस्ति।

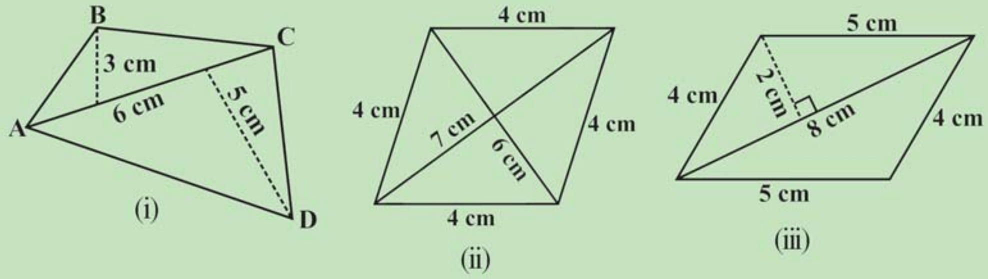
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 \text{सेमी}^2 = 41 \text{सेमी}^2$$

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

समान्तरचतुर्भुजस्य विकर्णं रचयित्वा तं द्वयोः सर्वाङ्गसम-त्रिभुजयोः विभज्यते। किं समलम्बम् अपि द्वयोः सर्वाङ्गसम-त्रिभुजयोः विभाजयितुं शक्यते ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

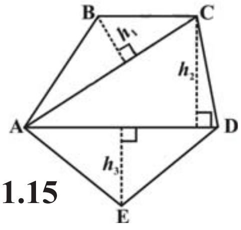
निम्नलिखित-चतुर्भुजानां क्षेत्रफलं जानन्तु। (आकृतिः 11.14)



आकृतिः 11.14

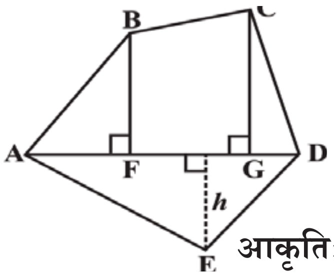
11.5 बहुभुजस्य क्षेत्रफलम्

वयम् एकं चतुर्भुजं त्रिभुजेषु खण्डितं कुर्मः तथा अस्य क्षेत्रफलं जानीमः। एतादृशस्य विधेः उपयोगः बहुभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं भवितुम् अर्हति। एकस्य पञ्चभुजस्य कृते निम्नलिखिते विचारं कुर्वन्तु (आकृतिः 11.15, 11.16)।



आकृतिः 11.15

AC तथाAD विकर्णयोः रचनां कुर्वन्तः ABCDEइति पञ्चभुजं त्रिषु भागेषु विभक्तं कुर्मः। अत एव ABCDE इत्यस्य क्षेत्रफलं =△ABC इत्यस्य क्षेत्रफलम् +△AED इत्यस्य क्षेत्रफलम्+△

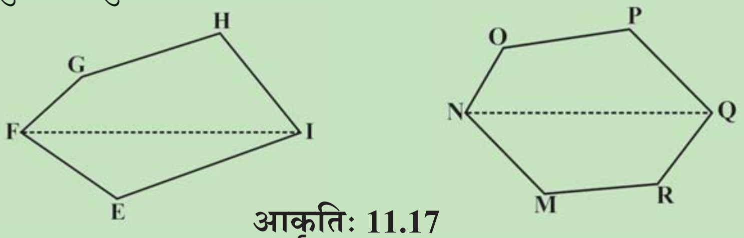


आकृतिः 11.16

AD इति एकं विकर्णस्य तथा BF, CG इति द्वयोः लम्बयोः निर्माणेन ABCDE इति पञ्चभुजः चतुर्धा विभाजितः अभवत्। ABCDE इत्यस्य क्षेत्रफलम् = AFB इत्यस्य समकरोण-त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् + BFGC इत्यस्य समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् + CGD इत्यस्य समकरोण-त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् + AED इत्यस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्। (BFGC इति सम-चतुर्भुजस्य समान्तर-भुजयोः अभिजानन्तु।)

प्रयासं करोतु

(i) निम्नलिखित-बहुभुजानां (आकृतिः 11.17) क्षेत्रफलं ज्ञातुम् एतान् (त्रिभुजेषु समलम्बेषु च) विभिन्नभागेषु विभजन्तु।



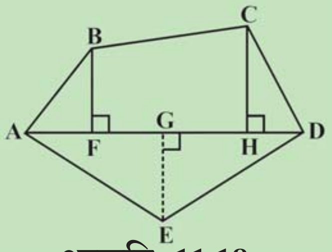
आकृतिः 11.17

(ii) ABCDE इति बहुभुजं विभिन्नभागेषु विभक्तं वर्तते यथा 11.18 आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति। यदि AD = 8सेमी, AH=6सेमी, AG=4सेमी, AF=3सेमी,तथा लम्बः BF= 2सेमी, CH=3सेमी, EG= 2.5सेमी, तर्हि अस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। ABCDE इति बहुभुजस्य क्षेत्रफलं = △AFB इत्यस्य क्षेत्रफलं + ...

△AFB इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}$×AF×BF = $\frac{1}{2}$×3×2=...

समलम्बः FBCH इत्यस्य क्षेत्रफलं =FH ×$\frac{(BF+CH)}{2}$

=3×$\frac{(2+3)}{2}$ [FH=AH-AF]

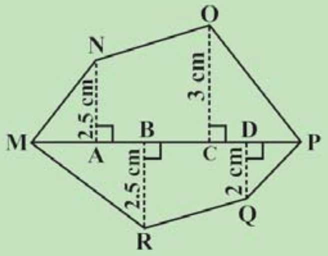


आकृतिः 11.18

△CHD इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}$ × HD×CH=....;△ADC इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}$×AD×GE=....

अत एव ABCDE इत्यस्य क्षेत्रफलम् = ...

(iii) यदि MP = 9सेमी, MD = 7सेमी, MC = 6सेमी, MB = 4सेमी, MA = 2 सेमी तर्हि बहुभुजः MNOPQR (आकृतिः 11.19) इत्यस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।NA, OC एवं RB विकर्णाः MP इत्यस्मिन् रचिताः लम्बाः सन्ति



आकृतिः 11.19

उदाहरणम् 1 समलम्बाकारस्य एकस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं 480मी^{2} अस्ति, द्वयोः समान्तरभुजयोः दूरी 15मी अस्ति तथा तयोः एकस्य समान्तरभुजयोः औन्नत्यं 20 मी अस्ति। द्वितीय-समान्तर-भुजयोः औन्नत्यं जानन्तु।

समाधानम् समलम्बस्य समान्तरभुजेषु एकस्य औन्नत्यं a=20मी, इति स्वीकुर्वन्तु द्वितीयसमान्तरभुजः b अस्ति औन्नत्यं h=15मी

समलम्बस्य प्रदत्तं क्षेत्रफलम् = 480मी^{2}

समलम्बस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ h (a+b)

अत एव 480 = $\frac{1}{2}$×15×(20+b) अथवा = $\frac{(480 \times 2)}{15}$ = 20+b

अथवा 64=20+b अथवा b=44m

अतः समलम्बस्य द्वितीय-समान्तरभुजः 44m अस्ति।

उदाहरणम् 2 एकस्य समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं 240सेमी^{2} अस्ति तथा विकर्णेषु एकस्य औन्नत्यं 16सेमी अस्ति।द्वितीयविकर्णं जानन्तु।

समाधानं स्वीकुर्वन्तु। एकस्य विकर्णस्य दीर्घता d_1=16सेमी

तथा द्वितीयविकर्णस्य औन्नत्यम् = d_2

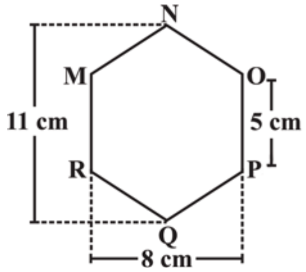
समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ $d_1.d_2$=240

अतएव $\frac{1}{2}$ 16.d_2= 240

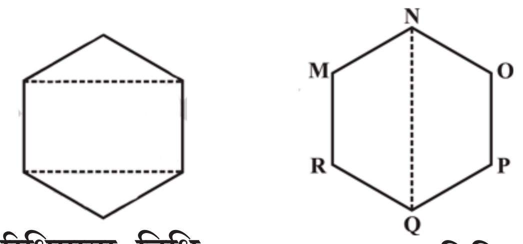
अतः d_2= 30सेमी

एवं रीत्या द्वितीयविकर्णस्य दीर्घता 30सेमी अस्ति।

उदाहरणम् 3 MNOPQR (आकृतिः 11.20) एकः षड्भुजः अस्ति यस्य प्रत्येकं भुजः 5 सेमी अस्ति। अमनः तथा रिधिमा एतं भिन्न-भिन्नरीत्या विभजति (आकृतिः 11.21)। उभयविध-प्रकारकयोः उपयोगं कुर्वन्तः अस्य षड्भुजस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।



आकृतिः 11.20

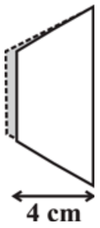


रिधिमायाः विधिः अमनस्य विधिः

आकृतिः 11.21

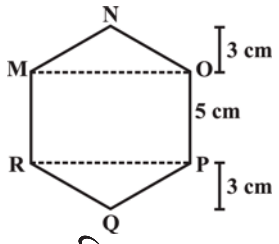
समाधानम् अमनस्य विधिः

यतो हि एषः एकः षड्भुजः अस्ति अत एव NQ एतं षड्भुजं सर्वाङ्गसम-समलम्बद्वये विभजति भवन्तः एतं कागद-पुटीकरण-विधि माध्यमेन सत्यापितं कर्तुं शक्नुवन्ति। (आकृतिः 11.22)



आकृतिः 11.22

अधुना समलम्बः MNQRइत्यस्य क्षेत्रफलं = 4 × $\frac{(11+5)}{2}$ = 2×16=32सेमी^{2}



आकृतिः 11.23

अत एव MNOPQR षड्भुजः इत्यस्य क्षेत्रफलं =2×32=64सेमी^{2} रिधिमायाः विधिः

△MNOतथा △RPQ सर्वाङ्गसम-त्रिभुजौ स्तः येषु प्रत्येकं शीर्षस्य दीर्घता 3 सेमी अस्ति (आकृतिः 11.23) (1)

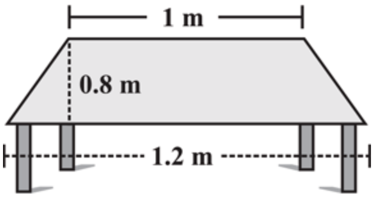
भवन्तः एतान् त्रिभुजान् कर्तयित्वा तथा परस्परम् उपरि नीचैः संस्थाप्य अस्य सत्यापनं कर्तुं शक्नुवन्ति।

$\triangle$MNO इत्यस्य क्षेत्रफलं = $\frac{1}{2}\times8\times3$ = 12सेमी^{2} = RPQ इत्यस्य क्षेत्रफलम् क्षेत्रफलं MOPR आयतस्य क्षेत्रफलं = 8 ×5=40सेमी^{2}

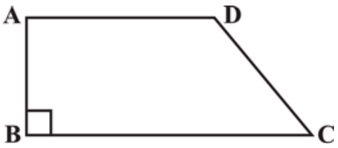
अधुना षड्भुजः MNOPQR इत्यस्य क्षेत्रफलं =40+12+12=64सेमी^{2}

प्रश्नावली 11.2

1. एकस्याः उत्पीठिकायाः पृष्ठस्य आकारः समलम्बः इव अस्ति । यदि अस्य समान्तरभुजौ 1मी तथा 1.2मी स्तः एवम् एतयोः समान्तरभुजयोः मध्यस्था दूरी 0.8मी अस्ति तर्हि अस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

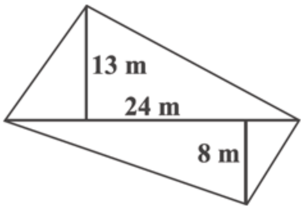


2. एकस्य समलम्बस्य क्षेत्रफलं 34सेमी^{2} अस्ति तथा अस्य दीर्घता 4सेमी अस्ति । समान्तर-भुजेषु एकस्य 10सेमी दीर्घता अस्ति । द्वितीयसमान्तर-भुजस्य दीर्घतां जानन्तु ।



3. समलम्बाकारस्य एकस्य क्षेत्रस्य ABCD इत्यस्य स्तम्भस्य दीर्घता 120m अस्ति । यदि BC = 48m, CD = 17m, तथा AD = 40m अस्ति तर्हि अस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं जानन्तु । AB भुजः AD तथा BC समान्तरभुजैः सह लम्बः अस्ति ।

4. चतुर्भुजाकारस्य एकस्य क्षेत्रस्य विकर्णः 24m अस्ति तथा अवशिष्ट-शीर्षेभ्यः अस्मिन् विकर्णे रचितौ लम्बौ 8m एवं 13m स्तः । क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

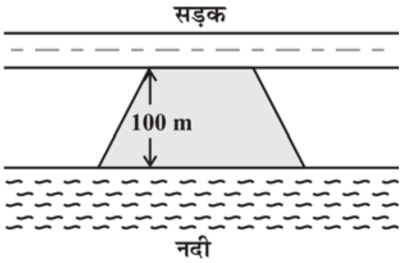


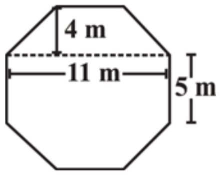
5. कस्यापि समचतुर्भुजस्य विकर्णौ 7.5 सेमी तथा 12सेमी अस्ति । अस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

6. एकस्य समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं जानन्तु यस्य भुजः 5सेमी तथा शीर्षलम्बः 4.8सेमी अस्ति । यदि एकस्य विकर्णस्य दीर्घता 8सेमी अस्ति तर्हि द्वितीयविकर्णस्य दीर्घता जानन्तु ।

7. कस्यापि भवनस्य तले समचतुर्भुजस्य आकारयुक्ताः 3000 स्निग्धप्रस्तराः सन्ति तथा एतेषु प्रत्येकं विकर्णः 45सेमी तथा 30सेमी इति दीर्घतायुक्तौ स्तः । 4 रुप्यकात्मकं प्रति वर्गमीटर् इति स्तरेण अस्य भूतलस्य परिष्कारस्य व्ययं जानन्तु ।

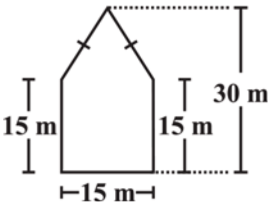
8. मोहनः एकं समलम्बाकारं क्षेत्रं क्रेतुम् इच्छति । अस्य क्षेत्रस्य नद्या सह युक्तः भुजः मार्गेण साकं यः भुजः अस्ति तस्य समान्तरः अस्ति तथा दीर्घतायाः द्विगुणं वर्तते यदि अस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं 10,500 m^2 अस्ति तथा द्वयोः समान्तरभुजयोः मध्यस्था एका लम्बायमाना दूरी 100m अस्ति, तर्हि नद्या अनुदिशं यः भुजः वर्तते तस्य दीर्घतां जानन्तु ।

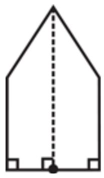


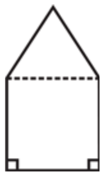


9. एकस्य उन्नतमञ्चस्य उपरितनः पृष्ठः अष्टभुजाकारः अस्ति, यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति । अष्टभुजपृष्ठस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

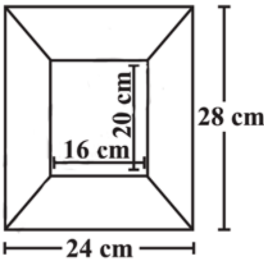
10. एकं पञ्चभुजाकारम् उद्यानम् अस्ति यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति। अस्य क्षेत्रफलस्य ज्ञानार्थं ज्योतिः कविता च एतं विभिन्नरीत्या विभजति। उभयविधरीत्योः उपयोगं कुर्वन्तः अस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलं जानन्तु। किं भवन्तः अस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं कमपि अन्यं विधिं ज्ञापयितुं शक्नुवन्ति ?




ज्योत्याः आरेखः


कवितायाः आरेखः

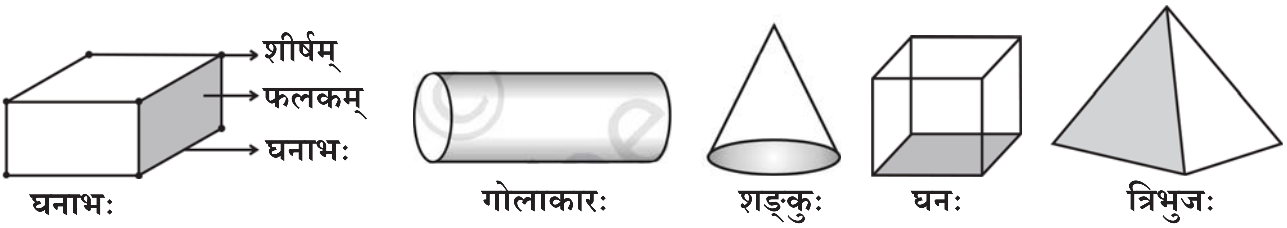
11. संलग्न-चित्रस्य आवारक-आरेखस्य बहिस्तनः आकारः 24सेमी×28सेमी तथा अन्तः आकारः च 16सेमी×20सेमी अस्ति। यदि आवारकस्य प्रत्येकं खण्डस्य वैशाल्यं समानम् अस्ति तर्हि प्रत्येकं खण्डस्य क्षेत्रफलं जानन्तु।



11.6 सघनः आकारः

भवन्तः स्वपूर्वकक्ष्यायाम् अध्ययनं कृतवन्तः यत् द्विविमीय-आकृतीन् त्रिविमीय-आकाराणां फलकरूपे परिचेतुं शक्नुवन्ति। इदानीं पर्यन्तं वयं येषां सघनानाम् अध्ययनं कृतवन्तः तेषु ध्यानं ददतु (आकृतिः 11.24)।

ध्यानं ददतु यत् केषुचित् आकारेषु द्वे अथवा द्विसंख्यातः अधिकं (सर्वाङ्गसमं) फलकम् अस्ति। तेभ्यः संज्ञां ददतु। केषु सघनेषु सर्वाणि फलकानि सर्वाङ्गसमानि सन्ति ?



आकृतिः 11.24

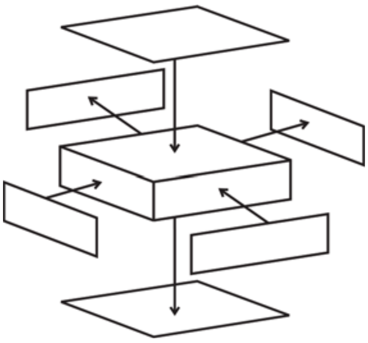
एतत् कुर्वन्तु

फेनकं, क्रीडनकं, दन्तफेनकम्, अल्पाहारः इत्यादिकं प्रायः घनाभकार-मञ्जूषासु, घनाकार-मञ्जूषासु अथवा गोलाकारः मञ्जूषासु पिहितम् आगच्छति। एतादृशीं मञ्जूषाम् एकत्री कुर्वन्तु (आकृतिः 11.25)।

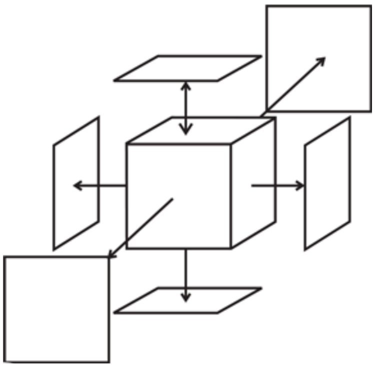
आकृतिः 11.25

सर्वाणि षड् फलकानि आयताकाराणि सन्ति तथा सम्मुखफलकं सर्वाङ्ग-समम् अस्ति । अत एव सर्वाङ्गसम-फलकानां युग्मत्रयं भवति ।

घनाभकारामञ्जूषा

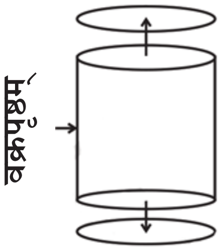


घनाकारामञ्जूषा



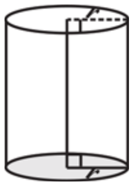
एकं वक्रपृष्ठम् अथ द्वे वृत्ताकारफलके यत् सर्वाङ्गसमे स्तः ।

गोलाकारमञ्जूषा



वृत्ताकाराधारः शीर्षञ्च सर्वाङ्ग-समम् स्तः ।

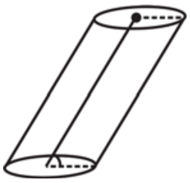
सर्वाणि षड्फलकानि वर्गाकाराणि सन्ति तथा सर्वाङ्गसमानि सन्ति ।



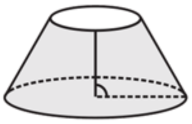
आकृतिः 11.26 (एषः एकः लम्बवृत्तीय-गोलाकारः अस्ति ।)

साम्प्रतम् एकस्मिन् समये एकप्रकारिकां मञ्जूषां स्वीकुर्वन्तु । अस्याः सर्वाणि फलकानि कर्तयन्तु । प्रत्येकं फलकस्य आकारं पश्यन्तु तथा समानफलकं परस्परम् उपरि संस्थाप्य मञ्जूषायां फलकानां संख्यां जानन्तु । स्वकीय प्रेक्षणानि लिखन्तु ।

किं भवन्तः निम्नलिखिते ध्यानं दत्तवन्तः गोलाकारस्य सर्वाङ्गसम-वृत्ताकार-फलकं परस्परं समान्तरम् अस्ति (आकृतिः 11.26) । ध्यानं ददतु यत् वृत्ताकारफलकानां मध्यबिन्दुं मेलनार्थं रेखाखण्डाधारे लम्बः अस्ति । एतादृशः गोलाकारः लम्बवृत्तीय-गोलाकारः उच्यते । वयं केवलम् एतादृश-गोलाकाराणाम् एव अध्ययनं करिष्यामः, यद्यपि द्वितीयप्रकारकाः गोलाकाराः अपि भवन्ति (आकृतिः 11.27) ।



आकृतिः 11.27 (एषः एकः लम्बवृत्तीय-गोलाकारः नास्ति ।)

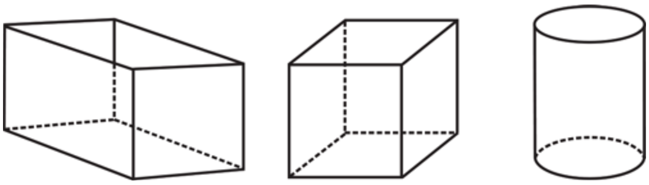


विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

संलग्न-आकृतौ प्रदर्शितं सघनं गोलाकारकथनं कथम् असमीचीनम् अस्ति ?

11.7 घनः, घनाभः तथा गोलाकारस्य पृष्ठीयक्षेत्रफलम्

इमरानः, मोनिका तथा जसपालः क्रमशः समान-उच्च घनाभकारं घनाकारं तथा गोलाकारं मञ्जूषां चित्रयति ।



आकृतिः 11.28

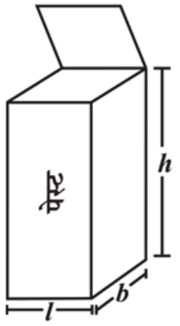
ते एतत् ज्ञातुं प्रयतन्ते यत् कः कियत् अधिकं क्षेत्रफलं चित्रितवन्तः हरितवर्णः तान् ज्ञापयति यत् प्रत्येकं मञ्जूषायाः पृष्ठीय-क्षेत्रफलं ज्ञातुं तेषां साहाय्यं करिष्यति।

आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं ज्ञातुं प्रत्येकं फलकस्य क्षेत्रफलं जानन्तु तथा एतस्य योगं कुर्वन्तु। कस्यापि सघनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं तस्य फलकानां क्षेत्रफलानां योगरूपं भवति तथा इतोपि स्पष्टीकरणाय वयं प्रत्येकम् आकारम् एकैकशः स्वीकुर्मः।

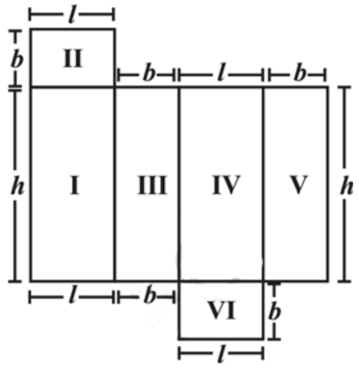
11.7.1 घनाभः

स्वीकुर्वन्तु भवन्तः एकां घनाभाकारां मञ्जूषां (आकृतिः 11.29) कर्तयित्वा उद्घाट्य च समतले विस्तारयन्ति (आकृतिः 11.30) वयम् एकं जालं प्राप्नुमः।

प्रत्येकं भुजस्य आकारं लिखन्तु। भवन्तः जानन्ति यत् सर्वाङ्गसम-फलकानां युग्मत्रयं भवति। प्रत्येकं फलकस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं भवन्तः कीदृक् व्यञ्जकम् उपयोगं कर्तुम् अर्हन्ति ?



आकृतिः 11.29



आकृतिः 11.30

मञ्जूषायाः सर्वेषां फलकानाम् आहत्य क्षेत्रफलं जानन्तु। वयं पश्यामः यत् घनाभस्य आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् = क्षेत्रफलम् I +क्षेत्रफलम् II + क्षेत्रफलम् III + क्षेत्रफलम् IV + क्षेत्रफलम् V + क्षेत्रफलम् VI

$= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$

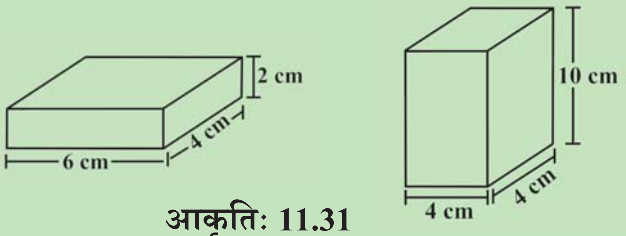
अत एव आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्र $= 2\ (h \times l + b \times h + b \times l) = 2\ (lb + bh + hl)$ येषु h,l तथा b क्रमशः घनाभस्य औन्नत्यं, दीर्घता अथ वैशाल्यम् अस्ति।

यदि उपर्युक्त-प्रदर्शित-मञ्जूषायाः औन्नत्यं, दीर्घता अथ वैशाल्यं क्रमशः 20 सेमी, 15 सेमी तथा 10 सेमी अस्ति तर्हि आहत्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $= 2\ (20 \times 15 + 20 \times 10 + 10 \times 15)$

$= 2\ (300+200+150) = 1300 m^2$

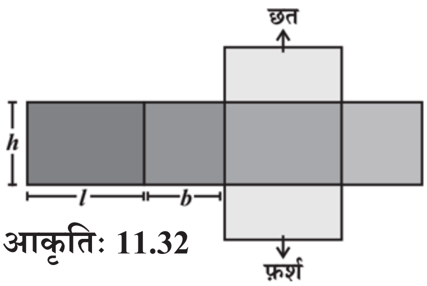
प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-घनाभानाम् (आकृतिः 11.31)
आहत्यपृष्ठीय-क्षेत्रफलंजानन्तु।



आकृतिः 11.31

- घनाभस्य भित्तिः (तलस्य शीर्षस्य च अतिरिक्तं फलकम्) पार्श्वपृष्ठम् अपि क्षेत्रफलं प्रददाति। उदाहरणतः यस्मिन् घनाभाकारे प्रकोष्ठे भवन्तः उपविष्टाः सन्ति तस्य प्रकोष्ठस्य चतसृणां भित्तीनाम् आहत्य क्षेत्रफलं प्रकोष्ठस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् अस्ति (आकृतिः 11.32)। अतः घनाभस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं एतेन प्राप्तुं शक्यते। $2(h \times l + b \times h) = 2h(l+b)$



आकृतिः 11.32

एतत् कुर्वन्तु

(i) एकः घनाभाकारः मार्जकः (यं भवताम् अध्यापकः कक्ष्यायाम् उपयोगं करोति) इत्यस्य पार्श्व-पृष्ठं धूसरवर्णस्य कागद-पट्टिकया एवं रीत्या आच्छादयन्तु यत् एतत् मार्जक-पृष्ठस्य चतुर्दिक्षु संयक् संयुक्तं भवेत्। कागदम् अपसारयन्तु। कागदस्य क्षेत्रफलं मापयन्तु। किम् एतत् मार्जकस्य पार्श्व-पृष्ठीय क्षेत्रफलम् अस्ति ?

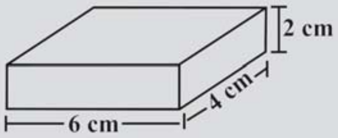
(ii) स्वकीय कक्ष्यायाः प्रकोष्ठस्य दीर्घतां, औन्नत्यं तथा वैशाल्यं मापयन्तु तथा निम्नलिखितं जानन्तु।

(a) वातायनानां कपाटानाञ्च क्षेत्रफलं हित्वा प्रकोष्ठस्य सम्पूर्णं पृष्ठीय क्षेत्रफलम्।

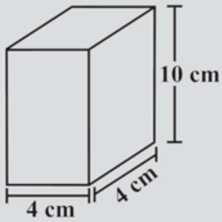
(b) अस्य प्रकोष्ठस्य पार्श्व-पृष्ठीय क्षेत्रफलम्।

(c) स्वच्छायमानस्य प्रकोष्ठस्य पूर्णं क्षेत्रफलम्।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु



आकृतिः 11.33

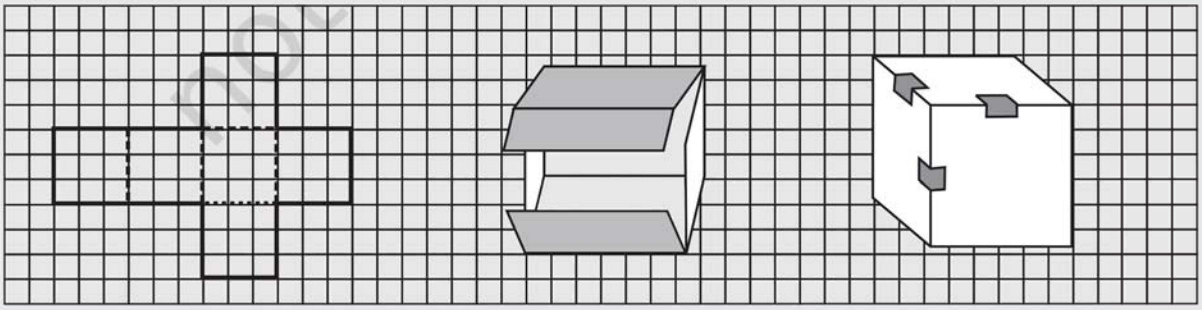


1. किम् अहं कथयितुं शक्नुमः यत् घनाभस्य आहत्य पृष्ठीय क्षेत्रफलम् = पार्श्व-पृष्ठीय क्षेत्रफलम् अस्ति + (2 ×आधारस्य क्षेत्रफलम् ?)
2. यदि वयं काचित् घनाभ आकृतेः (11.33(i)) उन्नतांशं तथा आधारस्य दीर्घतां परस्परं परिवर्त्य एकां भिन्नं घनाभ आकृतिं (11.33(ii)) प्राप्नुमः, चेत् पार्श्वं पृष्ठीयं च क्षेत्रफलं परिवर्तते ?

11.7.2 घन

एतत् कुर्वन्तु

अधोदत्तं पत्रं वर्गी-पत्रे चित्र-लेखनं कृत्वा कर्तनं करोतु (आकृतिः 11.34 (i))। भवान् जानाति यत् एषः प्रतिरूपः घनस्य पूर्णः अस्ति इति। तत् रेखानाम् अनुदिशि पुटीकरोतु (11.34 (ii) तथा धाराः योज्यन्ते चेत् घनस्य निर्माणं भवति (आकृतिः 11.34 (iii))



(i) (ii) (iii)

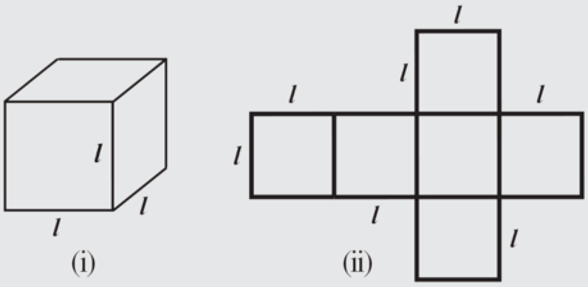
आकृतिः 11.34

(a) घनस्य दीर्घता, विशालता औन्नत्यं च किम् ? घनस्य सर्वाणि मुखानि वर्गाकाराणि एव इति पश्यन्तु । अनेन दीर्घता, विशालता, औन्नत्यं च समानम् इति ज्ञायते (आकृतिः 11.35 (i)

(b) प्रत्येकं मुखस्य क्षेत्रफलं लिखतु । तानि क्षेत्रफलानि समानानि वा ?

(c) अस्य घनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं लिखतु ।

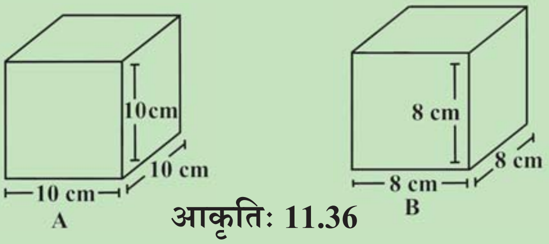
(d) यदि घनस्य एकैकः भुजः l अस्ति, तर्हि प्रत्येकस्य मुखस्य क्षेत्रफलं किम् ? (आकृतिः 11.35(ii) । l इति भुजयुक्तस्य घनस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं $6l^2$ इति वक्तुं शक्यते वा ?



आकृतिः 11.35

प्रयत्नं कुर्वन्तु

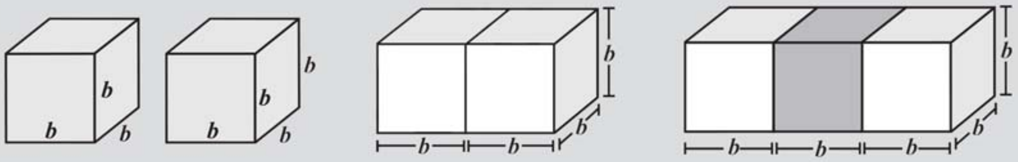
A इति घनस्यपृष्ठीय-क्षेत्रफलं तथा B इति घनस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं जानन्तु (आकृतिः 11.36) ।



आकृतिः 11.36

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

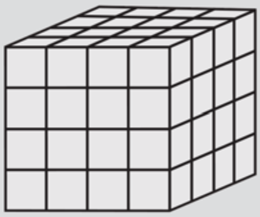
(i) b इति भुजयुक्तं घनद्वयं सम्मेल्य एकः घनाभः निर्मितः (आकृतिः 11.37) । अस्य घनाभस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं किम् अस्ति ? किम् इदम् $12b^2$ अस्ति ? किम् एतादृशं घनत्रयं सम्मेल्य निर्मितस्य घनाभस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं $18b^2$ अस्ति ? कथम् ?



आकृतिः 11.37

(ii) न्यूनतम-पृष्ठीय-क्षेत्रफलस्य घनाभं निर्मातुं समानभुजीय 12 घनान् कथं व्यवस्थितं करिष्यन्ति ?

(iii) कस्यापि घनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलस्य वर्णदानस्य पश्चात् तं घनं समानविमायुक्तं 64 घनेषु कर्तयितुं शक्नुवन्ति (आकृतिः 11.38) । एतेषु कति घनानां कमपि फलकं वर्णान्वितं नाभवन् ? कति घनानां 1 फलकं वर्णान्वितं जातम् ? कति घनानां फलकदव्यं वर्णान्वितं जातम् ? कति घनानां 3 फलकत्रयं वर्णान्वितं जातम् ?

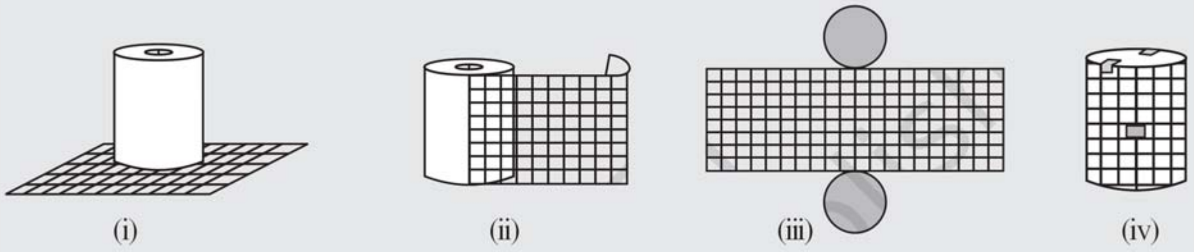

आकृतिः 11.38

11.7.3 गोलकः

यान् गोलकान् वयं पश्यामः तेषु अधिकतराः लम्बवृत्तीयगोलकाः अस्ति। उदाहरणतः एका मञ्जूषा, गोलस्तम्भः, विद्युद्दण्डः, जलस्य एका प्रणालिका इत्यादिः।

एतत् कुर्वन्तु

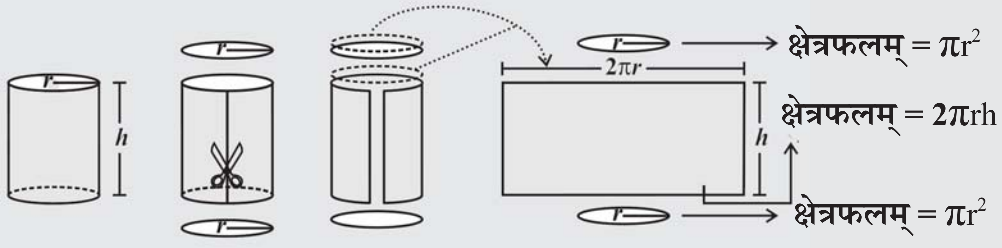
(i) एकां गोलाकारकूपीम् अथवा मञ्जूषां स्वीकुर्वन्तु तथा अस्य आधारं आलेखपत्रे पुनः रचयन्तु। तथा एतं कर्तयित्वा बहिः निष्कासयन्तु (आकृतिः 11.39 (i))। एकम् एतादृशं रचित-कागदं स्वीकुर्वन्तु। यस्य वैशाल्यं गोलाकारकूप्याः औन्नत्यस्य समानं स्यात्। एतां पट्टिकां गोलाकारकूपीं परितः ईदृशं वेष्टयन्तु यस्मात् गोलाकारकूप्याः चतुर्दिक्षु समीचीनरूपेण भवेत् (अतिरिक्तं कागदं अपसारयन्तु) (आकृतिः 11.39 (ii)) खण्डं परस्परं सम्मेल्य टेप-इति माध्यमेन वेष्टयन्तु (आकृतिः 11.39 (iii)) यस्मात् गोलाकारः निर्मितः स्यात् (आकृतिः 11.39(iv)) गोलाकारकूपीं परितः आवेष्टितस्य कागदस्य आकारः कः।



आकृतिः 11.37

निःसन्देहः एषः आकारः आयताकारः अस्ति। यदा भवन्तः अस्य गोलाकारस्य प्रान्तभागं परस्परं सम्मेल्य टेप् इत्यनेन संयोजयन्ति तदा आयताकारिकायाः पट्टिकायाः दीर्घता वृत्तस्य परिधेः समानम् अस्ति। वृत्ताकार-आधारस्य त्रिज्या (r) तथा आयताकारपट्टिकायाः दीर्घता (l) एवम् औन्नत्यं (h)इति लिखन्तु। $2\pi r$ = पट्टिकायाः दीर्घता ? परीक्षयन्तु यत् किम् आयताकार-पट्टिकायाः क्षेत्रफलं $2\pi rh$ अस्ति ? गणयन्तु यत् वर्गाङकित-कागदस्य कति वर्गाः एककं गोलाकारं निर्मातुं उपयुक्तः। परीक्षयन्तु यत् किं एषा गणना $2\pi r(r+h)$ इति मानस्य प्रायः समाना अस्ति।

(ii) वयं गोलाकारस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलरूपे सम्बन्धस्य $2\pi r(r+h)$ निगमनम् अपरेण विधिना अपि कर्तुं शक्नुवन्ति। यथा निम्नलिखित-आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति तथैव एकं गोलाकारं कर्तयितुं कल्पयन्तु (आकृतिः 11.40)



आकृतिः 11.40

> विशेषः- यावत् किञ्चित् कथितं न स्यात् वयं π इत्यस्य मानं $\frac{22}{7}$ स्वीकुर्मः।

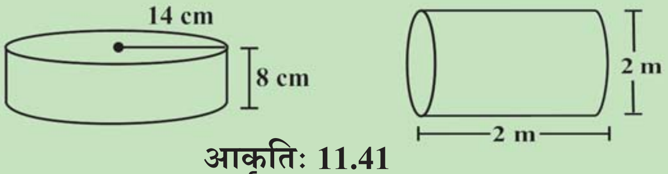
अत एव गोलाकारस्य पार्श्व-पृष्ठीयं (वक्र-पृष्ठीयम्) क्षेत्रफलं $2\pi rh$ अस्ति।

गोलाकारस्य पूर्ण-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $= r^2+2\pi rh+\pi r^2$

$= 2\pi r^2+2\pi rh$ अथवा $2\pi r\ (r+h)$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-गोलाकाराणाम् पूर्ण- पृष्ठीय-क्षेत्रफलं जानन्तु (आकृतिः 11.41)



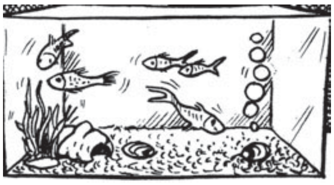
आकृतिः 11.41

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

विशेषरूपेण लिखन्तु यत् कस्यापि वेलनाकारस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं (वक्रपृष्ठीय-क्षेत्रफलम्, आधारस्य परिधिः × वेलनाकारस्य औन्नत्यं भवति ।) किं वयं घनाभस्य पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं आधारस्य परिमापनं × घनाभस्य औन्नत्यम् इति लेखितुं शक्नुमः ?

उदाहरणम् 4 एकं मत्स्यगृहं घनाभस्य आकाररूपेण अस्ति यस्य बाह्यमापनं 80 सेमी × 30 सेमी × 40 सेमी अस्ति । अस्य तलं, पृष्ठभागयुक्तं फलकं तथा पार्श्वफलकं वर्णयुक्त-कागदेन आच्छादनं भवेत् । आवश्यक-कागदस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

समाधानम्



मत्स्यगृहस्य दीर्घता =l=80सेमी

मत्स्यगृहस्य वैशाल्यम् =b=30सेमी

मत्स्यगृहस्य औन्नत्यम् =h=40सेमी

आधारस्य क्षेत्रफलम् $=l\times b=80\times30=2400$सेमी^{2}

पृष्ठभागीय फलकस्य क्षेत्रफलम् $=b\times h=30\times40=1200$सेमी^{2}

पार्श्वभागीय फलकस्य क्षेत्रफलम् $=l\times h=80\times40=3200$सेमी^{2}

वाञ्छितक्षेत्रफलम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् , पार्श्वभागीय फलकस्य क्षेत्रफलम्
+ (2×पृष्ठभागीयफलकस्य क्षेत्रफलम्)
$= 2400+3200+(2\times1200)=8000$सेमी^{2}

अतः वाञ्छित-वर्णयुक्त-कागदस्य क्षेत्रफलम् 8000सेमी^{2} अस्ति ।

उदाहरणम् 5 एकस्य घनाभाकार-कक्षस्य आन्तरिक-मापनम् 12 m × 8 m × 4 m अस्ति । यदि वर्णीकरणस्य मूल्यं 5 रुप्यकं प्रतिवर्गमीटरम् अस्ति तर्हि तस्य प्रकोष्ठस्य चतसृषु भित्तिषु वर्णीकरस्य व्ययं जानन्तु । यदि तस्य प्रकोष्ठस्य छदिभागे अपि वर्णीकरणं भवेत् तदा वर्णीकरणस्य मूल्यं किं भविष्यति ?

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु प्रकोष्ठस्य दीर्घता =l=12 m

प्रकोष्ठस्य वैशाल्यम् =b=8 m प्रकोष्ठस्य औन्नत्यम् =h=4 m

प्रकोष्ठस्य चतसृणां भित्तीनां क्षेत्रफलम् = आधारस्य परिमापनम् × प्रकोष्ठस्य औन्नत्यम्

$= 2(l+b)\times h=2(12+8)\times 4$

$= 2\times20\times4=160m^2$

वर्णीकरणस्य प्रतिवर्गमीटरं व्ययः = 5 रुप्यकम्

अत एव प्रकोष्ठस्य चतसृषु भित्तिषु वर्णीकरणस्य आहत्य व्ययः $=160\times5=800$ रु.

छद्याः क्षेत्रफलम् $=12\times8=96m^2$ छद्याः व्ययः = $(96\times5=480)$

छद्यां वर्णीकरणस्य सम्पूर्णः व्ययः =800+480=रु.1280

उदाहरणम् 6 एकस्मिन् भवने 24 वेलनाकार-स्तम्भाः सन्ति। प्रत्येकं स्तम्भस्य त्रिज्या 28 सेमी अस्ति तथा औन्नत्यं 4 मी अस्ति। 8 रुप्यकं प्रतिवर्ग.मी स्तरेण समेषां स्तम्भानां वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफले वर्णीकरणस्य व्ययं जानन्तु।

समाधानम् बेलनाकारस्य स्तम्भस्य त्रिज्या, $r=28$ सेमी$=0.28$ मी

औन्नत्यम् $h=4$ मी

बेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $2=\pi rh$

स्तम्भस्य वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $=2\times\frac{22}{7}\times0.28\times4=7.04$ मी^{2}

एतादृशं 24 स्तम्भानां वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $=7.04\times24=168.96$मी^{2}

1 m^2 इत्यस्मिन् वर्णीकरणस्य व्ययः =8 रुप्यकम्।

अतः 168.96 m^2 इति परिमिते क्षेत्रफले वर्णीकरणस्य व्ययः $=168.96\times8=$रु.1351.68

उदाहरणम् 7 एकम् एतादृशस्य बेलनाकारस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य त्रिज्या 7सेमी तथा सम्पूर्णं पृष्ठीय-क्षेत्रफलं 968सेमी^{2} अस्ति।

समाधानम् स्वीकुर्वन्तु बेलनाकारस्य औन्नत्यम् = h,त्रिज्या =r=7सेमी

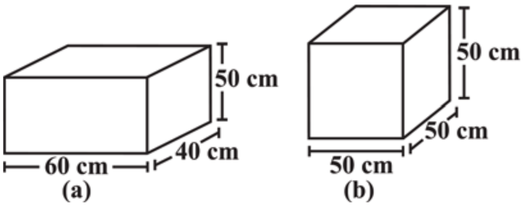
सम्पूर्णं पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् $=2\pi r\,(h+r)$

अर्थात् $2\times\frac{22}{7}\times7\times(7+h)=968$ अथवा $h=15$सेमी

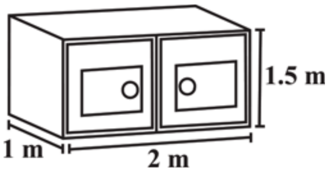
अतः बेलनाकारस्य औन्नत्यम् 15 सेमी अस्ति।

प्रश्नावली 11.3

1. द्वे घनाभाकारयुक्ते मञ्जूषे स्तः यथा संलग्न-आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति। कां मञ्जूषां निर्मातुम् अल्पसामग्रीणाम् आवश्यकता अस्ति?

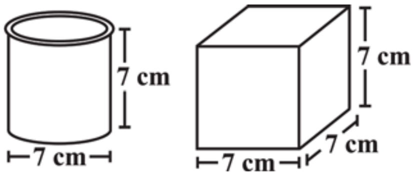


2. 80सेमी × 48सेमी × 24सेमी मापयुक्ताम् एकां मञ्जूषाम् आच्छादकवस्त्रेण आच्छादनं करणीयम्। एतादृशं 100 मञ्जुषाम् आच्छादयितुं 96सेमी विशालतायुक्तं कतिमीटर्परिमितं आच्छादनवस्त्रस्य आवश्यकता अस्ति?



3. एकम् एतादृशस्य घनस्य भुजं जानन्तु यस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं 600सेमी^{2} अस्ति।
4. रूखसारः 1 m × 2 m × 1.5 m इति मापयुक्ताम् एकां पेटिकां बहिस्तात् रञ्जितवती यदि सा मञ्जूषायाः तलम् अतिरिच्य तां सर्वतः रञ्जितवती तर्हि जानन्तु यत् सा कियत् पृष्ठीय-क्षेत्रफलं रञ्जितवती।
5. डैनियलः एकम् एतादृशस्य घनाभाकारस्य प्रकोष्ठस्य भित्तिं तथा छदिं रञ्जयति यस्य दीर्घता, वैशाल्यं तथा औन्नत्यं क्रमशः 15 m, 10 m तथा 7 m अस्ति। वर्णीकरणस्य प्रत्येकं कैन इत्यनेन 100m^2 क्षेत्रफलं रक्तुं शक्यते तदा तस्मै प्रकोष्ठस्य वर्णलेपनाय कति कैन इत्यस्य आवश्यकता भविष्यति?

6. वर्णयन्तु यत् दक्षभागे प्रदत्ताः आकृतयः कथं समानाः सन्ति तथा कथं परस्परं भिन्नाः ? कस्याः मञ्जूषायाः पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति ?



7. 7मी त्रिज्या तथा 3मी इति उन्नतायुक्तम् एकं पिहितं बेलनाकारं टैङ्क इति कस्यापि धातोः एकेन पटेन निर्मितम् अस्ति । तत् निर्मातुं वाञ्छित-धातोः पटस्य मात्रां जानन्तु ।

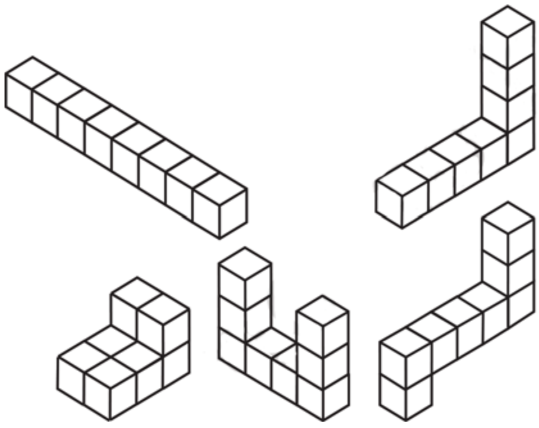
8. एकस्य रिक्तबेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं 4224सेमी^{2} अस्ति। एतम् एतस्यऔन्नत्यस्य अनुदिशं कर्तयित्वा 33सेमी विशालतायाः एकम् आयताकारकम् एकं पटं निर्माति आयताकार-पटस्य परिमापनं जानन्तु ।

9. कमपि मार्गं समतलं कर्तुम् एकं मार्गरोलरयन्त्रं मार्गस्य उपरि एकवारं भ्रमितुं 750 बारं भ्रमणं करणीयं भवति । यदि मार्गरोलरयन्त्रस्य व्यासः 84सेमी तथा दीर्घता 1 m अस्ति तर्हि मार्गस्य क्षेत्रफलं जानन्तु ।

10. एकम् उद्योगगृहं स्वकीयं दुग्धचूर्णम् एतादृश-बेलनाकार-पात्रेषु संरक्षति यस्य व्यासः 14सेमी तथा औन्नत्यं 20 सेमी अस्ति । उद्योगगृहं पात्रस्य पृष्ठभागे चतुर्दिक्षु एकं वर्णयुक्तं चिह्नं संयोजयति (यथा आकृतौ प्रदर्शितम् अस्ति) यदि एतत् वर्णयुक्तं चिह्नं पात्रस्य तलात् शीर्षाच्च उभयपक्षतः 2 सेमी इत्यस्य दूरे संयोजयति चेत् वर्णयुक्तचिह्नस्य क्षेत्रफलं किम् अस्ति ?

11.8 घनः, घनाभः तथा बेलनाकारस्य आयतनम्

एकेन त्रिविमी-वस्तुना आवृत्तं स्थलं तस्य आयतनम् उच्यते। स्वं परितः वस्तूनाम् आयतनस्य तोलनं कर्तुं प्रयतन्ताम्। उदाहरणतः कस्यापि प्रकोष्ठस्य अन्तः स्थिता-मञ्जुषा-अपेक्षया प्रकोष्ठस्य आयतनम् अधिकम् अस्ति । एवमेव भवतां अङ्कनी-मञ्जूषायाः आयतनम् अस्य अन्तः स्थापिताः लेखनीयाः तथा मार्जकस्य आयतनात् अधिकम् अस्ति । किं भवन्तः एतेषु कस्य अपि वस्तुनः आयतनं मापयितुं शक्नुवन्ति ?



आकृतिः 11.41

स्मरन्तु वयं कस्यापि क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं वर्ग-एककस्य उपयोगं कुर्मः । अत्र वयं सघनस्य आयतनं ज्ञातुं घन-एककस्य उपयोगं करिष्यामः यतो हि घनः सर्वाधिकः सुविधायुक्तः सघनाकारः अस्ति । (तथैव यथा कस्यापि क्षेत्रस्य क्षेत्रफलं मापयितुं वर्गः सर्वाधिकः सुविधाजनकः आकारः अस्ति) ।

क्षेत्रफलं ज्ञातुं वयं क्षेत्रं वर्ग-एककेषु विभाजयामः तद्वदेव कस्यापि सघन-पदार्थस्य आयतनं ज्ञातुं तं सघन-पदार्थं घन-एककेषु विभाजयामः । विचारयन्तु यत् निम्नलिखित-सघन-पदार्थेषु प्रत्येकं आयतनं 8 घनः एककः अस्ति (आकृतिः 11.42) ।

एवं रीत्या वयं कथयितुं शक्नुमः यत् कस्यापि सघनस्य आयतनं मापयितुं वयं तस्मिन् स्थितं घन-एककान् गणयामः ।

1 घनः सेण्टीमीटरम् = 1सेमी × 1सेमी × 1सेमी = 1सेमी^{3}

= 10mm × 10mm × 10mm = ...mm^3

1 घनः मीटरम् = 1 m × 1 m × 1 m = 1m^3

= ....सेमी^{3}

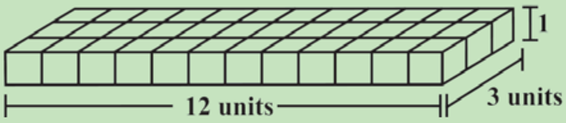
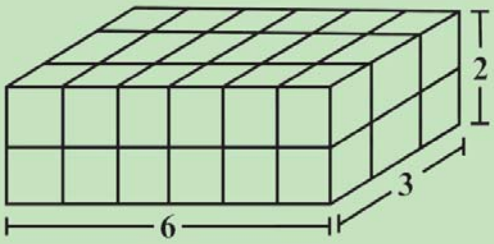
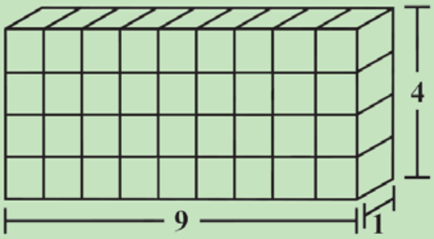
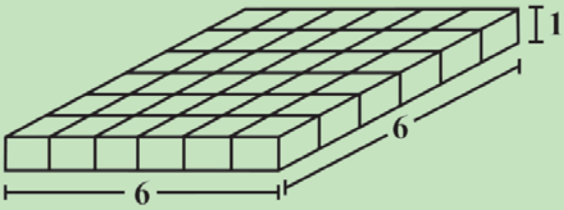
1 घनः मिलीमीटरम् = 1mm × 1mm × 1mm = 1mm^3

= 0.1सेमी × 0.1सेमी × 0.1सेमी = ...सेमी^{3}

अधुना वयं घनाभस्य , घनस्य अथ बेलनाकारस्य आयतनं ज्ञातुं किञ्चित् व्यञ्जकसूत्रं जानीमः । आगच्छन्तु प्रत्येकं सघन-पदार्थे क्रमशः चर्चां कुर्मः ।

11.8.1 घनाभः

समानाकारयुक्तः (प्रत्येकं घनस्य दीर्घता समाना) 36 घनान् स्वीकुर्वन्तु । एकं घनाभं निर्मातुं तान् व्यवस्थितं कुर्वन्तु । भवन्तः एतान् विभिन्नरूपेषु व्यस्थां कर्तुं शक्नुमः । निम्नलिखितसारण्यां विचारं कुर्वन्तु तथा रिक्तस्थानं पूरयन्तु ।

	घनाभः	दीर्घता	वैशाल्यम्	औन्नत्यम्	l×b×h=V
(i)		12	3	1	12 × 3 × 1 = 36
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

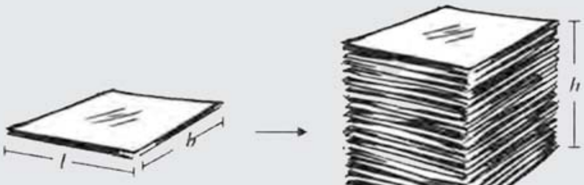
भवन्तः किं पश्यन्ति कुर्वन्ति च ?

यतो हि एतान् घनाभान् निर्मातुं वयं 36 घनानाम् उपयोगं कृतवन्तः अत एव प्रत्येकं घनाभस्य आयतनं 36 घनः एककः अस्ति । एतदतिरिच्य प्रत्येकं घनाभस्य आयतनं तस्य दीर्घता, वैशाल्यस्य तथा औन्नत्यस्य गुणनफलम् इव अस्ति । उपर्युक्त-उदाहरणेन वयं कथयितुम् अर्हामः यत् घनाभस्य आयतनं = $l \times b \times h$ अस्ति । यतो हि $l \times b$ इति आधारस्य क्षेत्रफलम् अस्ति अत एव वयम् एतत् अपि कथयितुं शक्नुमः यत् घनाभस्य आयतनम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् × औन्नत्यम् ।

एतत् कुर्वन्तु

एकस्य कागदस्य पत्रं स्वीकुर्वन्तु तथा अस्य क्षेत्रफलस्य मापनं कुर्वन्तु । तद्वदेव समानाकारकं कागदस्य पत्राणां समूहं निर्माय एकं घनाभं निर्मापयन्तु (आकृतिः 11.43) । एतस्य समूहस्य औन्नत्यं मापयन्तु । कागद-पत्राणां क्षेत्रफलं तथा तस्य औन्नत्यस्य गुणनफलं ज्ञात्वा घनाभस्य आयतनं जानन्तु ।

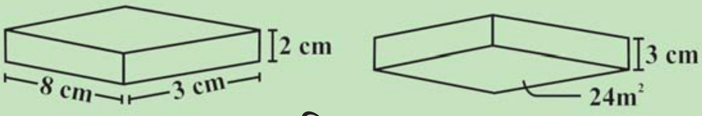
अयं क्रियाकलापः एतत् विचारं प्रदर्शयति यत् सघन-आयतनस्य निगमनम् अनेन विधिना अपि कर्तुं शक्यते (यदि कस्यापि कठोरस्य आधारः तथा शीर्षं सर्वाङ्गसमम् अस्ति तथा परस्परं समान्तरम् अस्ति तथा अस्य प्रान्तभागः आधारोपरि लम्बः अस्ति) किं भवन्तः एतादृशानां वस्तूनां विषये विचारयितुं शक्नुवन्ति यस्य आयतनम् अस्य विधेः उपयोगं कृत्वा ज्ञातुं शक्यते ?



आकृतिः 11.43

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-घनाभानां (आकृतिः 11.44) आयतनं जानन्तु -



आकृतिः 11.44

11.8.2 घनः

घनस्य, घनाभस्य एकम् अद्भुतम् उदाहरणम् अस्ति यस्मिन् $=l=b=h$.अतः घनस्य आयतनम् $=l \times l \times l= l^3$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

निम्नलिखित-घनानाम् आयतनं जानन्तु

(a) 4 सेमी भुजयुक्तः (b) 1.5 सेमी भुजयुक्तः

एतत् कुर्वन्तु

समान-आकारयुक्तान् 64 घनान् भवन्तः यावत् रूपेषु व्यवस्थितं कर्तुं शक्नुवन्ति तावत् रूपेषु व्यवस्थितं कृत्वा घनाभं निर्मान्तु । प्रत्येकं रूपस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं जानन्तु । किं समान-आयतनयुक्तानां सघन-आकृतीनां पृष्ठीय-क्षेत्रफलं समानं भवति ?

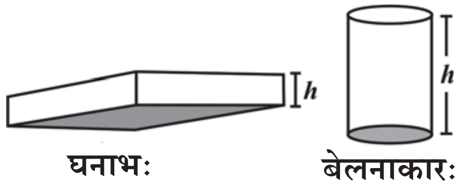
विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

एकम् उद्योगगृहं पिष्टकं विक्रीणाति । पिष्टकं सुरक्षितुं घनाभाकारान्वितानां मञ्जूषाणाम् उपयोगः भवति । मञ्जूषा A → 3सेमी × 8सेमी × 20सेमी, B → 4सेमी × 12सेमी × 10सेमी मञ्जूषायाः

आकारः उद्योगगृहाय आर्थिकदृष्ट्या लाभदायकः भविष्यति ? कथम् ? किं भवन्तः एतादृशम् एव कस्यचित् अन्याकारस्य मञ्जूषाविषये विचारयितुं शक्नुवन्ति यस्य आयतनम् एतत् सदृशं भवेत् परन्तु एतस्य तोलनायाम् आर्थिकदृष्ट्या इतोऽपि अधिकः लाभदायकः भवेत्।

11.8.3 बेलनाकारः

यत् घनाभस्य आयतनं तस्य आधारस्य क्षेत्रफलस्य तथा औन्नत्यस्य गुणनफलं ज्ञातुं शक्नुमः । किम् एवमेव वयं बेलनाकारस्य आयतनं ज्ञातुं शक्नुमः ? घनाभस्य सदृशं बेलनाकारे अपि एकः आधारः एकं शीर्षञ्च भवति यत् परस्परं सर्वाङ्गसमं समान्तरञ्च भवतः। घनाभस्य सदृशम् अस्य वक्रपृष्ठम् आधारस्य उपरि लम्बं भवति।



अत एव घनाभस्य आयतनम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् × औन्नत्यम्

= l=b=h=lbh

बेलनाकारस्य आयतनम् = आधारस्य क्षेत्रफलम् × औन्नत्यम्

= $\pi r^2 \times h = \pi r^2$ h

11.9 आयतनं धारिता च

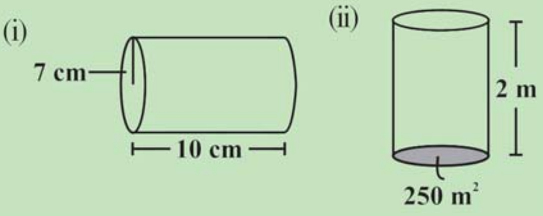
एतयोः द्वयोः शब्दयोः अधिकः भेदः नास्ति।

(a) केनापि वस्तुना आवृत्त-स्थलस्य मात्रा तस्य आयतनम् उच्यते।

(b) कस्मिन्नपि पात्रे पूरितस्य वस्तुनः मात्रा तस्य धारिता इति उच्यते।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

संलग्न-बेलनाकाराणाम् आयतनं जानन्तु



विशेषः - यदि कस्यापि जलसंरक्षणार्थं प्रयुज्यमाने लौहतनुपात्रे (टिनपात्रे) 100सेमी^{3} अस्ति। धारितां लीटरमध्ये अपि मापयितुं शक्नुवन्ति। लीटरमापकं तथा सेमी^{3} इत्यस्मिन् निम्नलिखितः सम्बन्धः अस्ति। 1mL=1 सेमी^{3},1 L = 1000सेमी^{3}. अतः 1 m^3=1000000सेमी^{3}=1000 L.

उदाहरणम् 8 एकम् एतादृशस्य घनाभस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य आयतनं 275सेमी^{3} तथा आधारस्य क्षेत्रफलं 25सेमी^{2} अस्ति।

समाधानम् घनाभस्य आयतनम् = × औन्नत्यम्

अतः घनाभस्य औन्नत्यम् = $\frac{\text{घनाभस्य क्षेत्रफलम्}}{\text{आधारस्य क्षेत्रफलम्}} = \frac{275}{25}$ =11सेमी

एवं रीत्या घनाभस्य औन्नत्यं 11 सेमी अस्ति।

उदाहरणम् 9 एकः घनाभाकारः भाण्डागारः यस्य मापनं 60 मी × 40 मी × 30 मी अस्ति। अस्य अन्तः कति घनाभाकारयुक्तां मञ्जूषां संरक्षितुं शक्नुमः यदि एकस्याः मञ्जूषायाः 0.8मी^{3} आयतनम् अस्ति ?

समाधानम् एकस्याः मञ्जूषायाः आयतनम् = 0.8 मी^{3}

भाण्डागारस्य आयतनम् = 60 ×40 × 30 = 72000मी^{3}

भाण्डागारस्य अन्तः संरक्ष्यमाणानां मञ्जूषाणां संख्या = $\frac{\text{भाण्डागारस्यआयतनम्}}{\text{1 मञ्जूषायाःआयतनम्}}$

$$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90,000$$

इत्थं भाण्डागारस्य अन्तः संरक्ष्यमाणानां मञ्जूषाणां संख्या 90,000 अस्ति।

उदाहरणम् 10 14 सेमी विशालतायुक्त-आयताकारं कागदं तस्य वैशाल्यस्य अनुदिशं पुटीकृत्य 20 सेमी त्रिज्यायुक्तम् एकं बेलनाकारं निर्मातुं शक्नुवन्ति। बेलनाकारस्य आयतनं जानन्तु (आकृतिः 11.45)। (π इत्यस्य कृते $\frac{22}{7}$ गृह्णन्तु)

समाधानम् कागदस्य वैशाल्यस्य अनुदिशं पुटीकृत्य बेलनाकारस्य निर्माणम् अभवत् अत एव कागदस्य वैशाल्यं बेलनाकारस्य औन्नत्यं भविष्यति तथा बेलनाकारस्य त्रिज्या 20 सेमी भविष्यति।

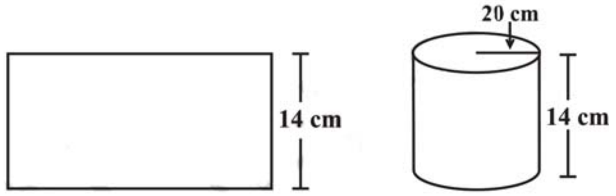
बेलनाकारस्य औन्नत्यम् = h=14सेमी

त्रिज्या = r=20सेमी

बेलनाकारस्य आयतनम् =V=π r^2 h

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600$सेमी^{3}

अतः बेलनाकारस्य आयतनम् 17600सेमी^{3} अस्ति।



आकृतिः 11.45

उदाहरणम् 11 11 सेमी × 4 सेमी मापयुक्तस्य आयताकारकागदस्य खण्डम् अतिव्यापनं विनैव पुटीकृत्य एकस्य 4 सेमी औन्नत्ययुक्त-बेलनाकारस्य निर्माणं भवति। बेलनाकारस्य आयतनं जानन्तु।

समाधानम् कागदस्य दीर्घता बेलनाकार-आधारस्य परिधिः भवति तथा वैशाल्यम् औन्नत्यं भवति।

स्वीकुर्वन्तु यत् बेलनाकारस्य त्रिज्या = r तथा औन्नत्यं = h

बेलनाकार-आधारस्य परिधिः = $2\pi r=11$

अथवा $2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$

अत एव $r = \frac{7}{4}$ सेमी

बेलनाकारस्य आयतनम् =V=πr^2 h

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4$ सेमी^{3}=38.5सेमी^{3}

अतः बेलनाकारस्य आयतनम् 38.5सेमी^{3} अस्ति।

प्रश्नावली 11.4

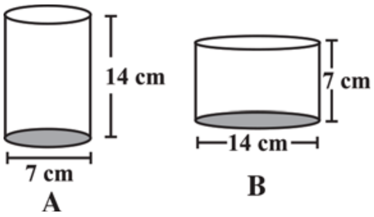
1. भवते एकं बेलनाकारं टैंक प्रदत्तम् अस्ति। निम्नलिखितेषु कस्यां परिस्थत्यां भवन्तः तस्य पृष्ठीय क्षेत्रफलं ज्ञास्यन्ति तथा कस्यां स्थित्याम् आयतनम्।

(a) एतत् ज्ञातव्यम् यत् यत् अस्मिन् कियत् जलं संरक्षितुं शक्यते।

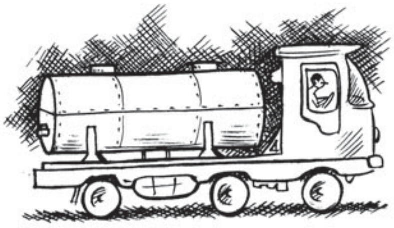
(b) अस्य सम्यक्-करणार्थं वाञ्छित-पाषाणचूर्ण-स्यूतानां संख्या।

(c) अस्मिन् पूरितजलेन पूर्यमाणं लघु-टैंकयानानां संख्या।

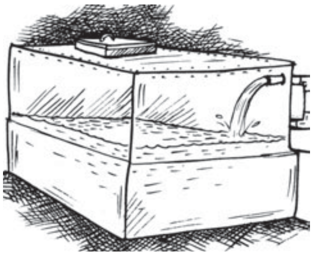
2. बेलनाकारस्य A इत्यस्य व्यासः 7 सेमी तथा औन्नत्यं 14 सेमी अस्ति। बेलनाकारस्य B इत्यस्य व्यासः 14 सेमी तथा औन्नत्यं 7 सेमी अस्ति। परिकलनं विनैव किं भवन्तः ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् एतयोः कस्य आयतनम् अधिकम् अस्ति। द्वयोः बेलनाकारयोः आयतनं जानन्तः अस्य सत्यापनं कुर्वन्तु। परीक्षयन्तु यत् किम् अधिक-आयतनयुक्तं बेलनाकारस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् अपि अधिकम् अस्ति।



3. एकम् एतादृशस्य घनाभस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य आधारस्य क्षेत्रफलं 180सेमी^{2} तथा यस्य आयतनं 900सेमी^{3} अस्ति ?



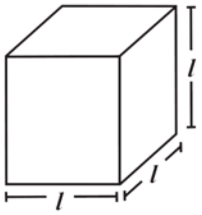
4. एकस्य घनाभस्य विमाः 60 सेमी×54 सेमी×30 सेमी सन्ति।अस्य घनाभस्य अन्तः 6 सेमी भुजयुक्तः कति घनान् स्थापयितुं शक्नुवन्ति।
5. एकस्य एतादृशस्य बेलनाकारस्य औन्नत्यं जानन्तु यस्य आयतनं 1.54 मी^{3} तथा यस्य आधारस्य व्यासः 140सेमी अस्ति।
6. एकं दुग्धस्य टैंक इति बेलनाकारः अस्ति यस्य त्रिज्या 1.5 मी अस्ति तथा लम्बकं 7 मी अस्ति। अस्मिन् टैंक मध्ये पूर्यमाणस्य दुग्धस्य मात्रा लीटरमापके जानन्तु।
7. यदि कस्यापि घनस्य प्रत्येकं प्रान्तभागं द्विगुणितं भवेत् तदा
   (i) अस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफले कियत् गुणिता वृद्धिः भविष्यति ?
   (ii) अस्य आयतने कियत् गुणिता वृद्धिः भविष्यति ?



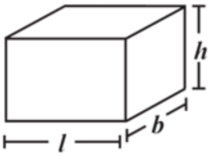
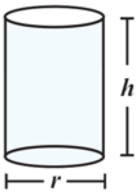
8. एकस्य तडागस्य अन्तः 60 लीटरपरिमितं प्रति मिनटं जलं निपतति। यदि तडागस्य आयतनं 180 मी^{3} अस्ति तर्हि जानन्तु यत् एतं कुण्डं पूरयितुं कति घण्टाः लगिष्यन्ति।

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. समलम्बस्य क्षेत्रफलम्
   समलम्बस्य क्षेत्रफलम् = समान्तरभुजानां दीर्घतानां योगस्य अर्धम् × तेषां मध्यस्य लम्बवत् दूरी।
   समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = विकर्णयोः गुणनफलस्य अर्धम्
2. एकस्य सघनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलं तस्य फलक-क्षेत्रफलानां योगः इव भवति।
3. घनाभस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् =2 (lb+bh+hl)
   घनस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् 61^2
   बेलनाकारस्य पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् =$2\pi r\ (r+h)$



4. कस्यापि सघनेन वस्तुना आवृत्त-स्थलस्य मात्रा तस्य आयतनम् उच्यते।
5. घनाभस्य आयतनम् =$l\times b\times h$
   घनस्य आयतनम् =l^3
   बेलनाकारस्य आयतनम् =$\pi r^2 h$



6. (i) 1 सेमी^{3}=1 मीली
   (ii) 1L=1000सेमी^{3}
   (iii) 1m^3=1000000सेमी^{3}=1000ली